Задачи «красного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (6 баллов) Ежик, Барсук и Заяц бегают вокруг опушки. Причем Ежик и Заяц по часовой стрелке, а Барсук – против часовой стрелки. Скорость Зайца в три раза больше скорости Ежика. Барсук встречает Ежика каждые пять минут, а Зайца – каждые три минуты. Как часто встречаются Ежик и Заяц, если скорости всех зверей постоянны? Ответ дайте в секундах.

Задача 2. (6 баллов) На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания, в которой присутствовали как те, так и другие. Каждого, кроме Пети, спросили: “Сколько среди вас рыцарей?”. Было получено пятнадцать ответов «14», шестнадцать ответов «17», семнадцать ответов «18». Какой ответ мог бы дать на такой же вопрос Петя?

Задача 3. (9 баллов) Двое продавцов выставили одинаковую цену на товар. После этого каждый день первый продавец или увеличивал цену на 400%, или уменьшал ее на 50%, а второй увеличивал каждый день либо на 60%, либо на 25%. Через какое наименьшее количество дней могло оказаться так, что у продавцов снова одинаковые цены?

Задача 4. (9 баллов) Оля по очереди закрашивает клетки таблицы 5×9. Закрасив какую-нибудь клетку, она записывает на бумажку сумму количеств пустых клеток в строке и в столбце с закрашенной. Какой может быть сумма всех выписанных ею чисел, когда всё поле будет закрашено?

Задача 5. (9 баллов) В ряд стоят 10 коробочек с конфетами, каждая из которых красная или синяя. Из каждой красной переложили по конфете во все синие, стоящие правее нее, а из каждой синей – во все красные, которые правее нее. В результате в синих коробочках стало на 21 конфету больше. Сколько могло быть красных коробочек?

Задача 6. (10 баллов) В трапеции *ABCD* основание *AD* вдвое больше основания *BC*. Точка *K* лежит на отрезке *BC*, а точка *M* – середина *AB*. Площадь трапеции равна 12, а суммарная площадь серых частей равна 2. Найдите площадь черного куска. (См. рис. 1)

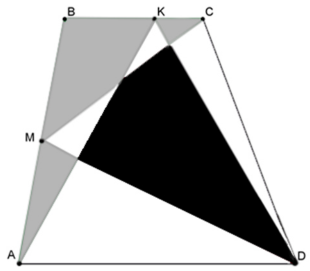

Рисунок 1

Задача 7. (10 баллов) Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$x^2+4y^2+5z^2=66$,
$xz+yz=8$,
$x+2y+3z=14$.
Найдите значение $4y-x$.

Задача 8. (12 баллов) На картинке в качестве примера изображено шестиугольное поле 3×4. Где-то на шестиугольном поле 10×12 спрятался кораблик 1×2. За какое наименьшее количество выстрелов можно гарантированно попасть в него хотя бы один раз? Каждый выстрел попадает ровно в одну шестиугольную ячейку на этом поле. (См. рис. 2)

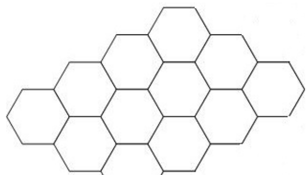

Рисунок 2

Задача 9. (14 баллов) На передней грани куба со стороной 100 сидит паук. Его координаты относительно правой верхней вершины: 1 влево, 5 вниз. На верхней грани сидит муха. Её координаты относительно той же вершины: 2 влево, 7 вперёд. Найти квадрат длины кратчайшего пути от паука до мухи по поверхности параллелепипеда.

Задача 10. (15 баллов) В магазине продаются открытки. Все открытки представлены в 6 разных цветах, с 8 разными надписями и с 10 разными картинками (в наличии имеются открытки с любым сочетанием указанных трёх признаков). Какое максимальное количество открыток можно купить так, чтобы среди них не было двух одинаковых и не было двух, у которых совпадает ровно 1 признак?