Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1.(5 баллов) Даша и Маша играли в «крестики-нолики» на доске 3×3. Кто играет крестиками, а кто ноликами, сначала определили жребием, а потом менялись. Маша выиграла 3 партии, а Даша – 4. На рисунке приведены окончания партий в том порядке, как они игрались. Определите, сколько партий выиграла Маша крестиками:(См. рис. 1)

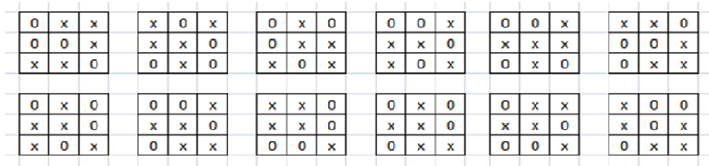


Рисунок 1

Ответ: 2

Решение 1: Пусть в первой партии одна девочка играла крестиками, а вторая ноликами. Тогда во второй - первая играла ноликами, а вторая крестиками. Запишем, кто как играл:

I X 0 X 0 **X** **0** X 0 **X** 0 X **0**
II **0** X 0 **X** 0 X 0 X 0 **X** 0 X

Жирным шрифтом выделено, кто выиграл в этой партии. Откуда видно, что одна выиграла 4 партии (значит, это Даша), а другая - 3 партии (значит, это Маша). Откуда легко видеть, что, Маша выиграла крестиками две партии.

Решение2: Заметим, что всего выиграно крестиками 4 партии и они стоят парами. Но поскольку символ каждую партию меняется, это значит, что в каждой такой паре крестиками выиграла одна девочка, а потом вторая. Кем они ни были, каждая выиграла по две партии крестиками.

Задача 2. (7 баллов) Ваня и Даня сыграли в шахматы 37 партий. Кто играет белыми, первый раз определяли жребием, а далее они менялись цветом. Оказалось, что каждый выиграл одинаковое число партий. Причем каждый выигрывал только белыми и не было двух результативных партий подряд. Какое минимальное количество ничьих было?

Ответ: 19 ничьих

Решение: Поскольку результативные партии не могут идти подряд, для их максимального количества они должны идти через одну. То есть больше 19 результативных партий быть не могло. А поскольку каждый выиграл одинаковое количество, то всего результативных не более 18.
Пример на 18 легко строится:

В - В - В - В - В - В - В - В - В - - Д - Д - Д - Д - Д - Д - Д - Д - Д -

Задача 3. (10 баллов) На клетчатой доске две клетки выкрашены в серый цвет так, как на рисунке. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке приведен пример такого прямоугольника.(См. рис. 2)

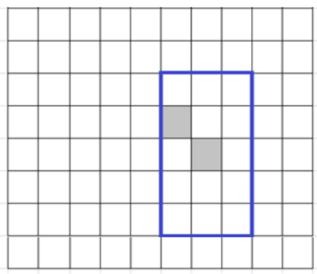


Рисунок 2

Ответ: 384 прямоугольника

Решение: Заметим, что прямоугольник определяется выбором вертикальных и горизонтальных линий, его ограничивающих. Для нижней линии 4 варианта, для верхней - 4. Для левой 6 вариантов и для правой - 4. Каждая из этих линий может быть выбрана независимо, поэтому количество прямоугольников равно произведению
4×4×6×4=384.

Задача 4. (8 баллов) Метатель ножей метает в мишень ножи и вилки с тремя зубцами. Всего он бросил 22 предмета, оставивших на мишени 50 дырок. Сколько у метателя ножей и сколько вилок, если никакие два предмета не попали в одно и то же место?

Ответ: 14 вилок и 8 ножей

Решение: Если бы все предметы были ножами, то на мишени осталось 22 дырки. Их же на 50 - 22 = 28 дырок больше. “Лишние” дырки добавляют вилки - по две на каждую. Значит, вилок было 28:2 = 14, а ножей 22 - 14 = 8.

Задача 5. (13 баллов) В верном арифметическом равенстве в левой части одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные - различными. Получилось: МАТ х Н + С+А+Т = 2022. Восстановите исходное равенство. Укажите все возможные варианты.

Ответ: 503 х 4 + 7 + 0 +3 или 670 х 3 + 5+7+0

Решение: Поскольку С+А+Т максимум 9+8+7=24, а минимум 0+1+2=3, то МАТхН должно быть не меньше 1998. Но и не больше 2019. Проверим, какие из чисел от 1998 до 2019 можно разложить на два множителя: однозначный и трехзначный.

2019=3х673, 2018=2х1009, 2016=4х504, 2015=5х403, 2014=2х1007, 2013=3х671, 2012=4х503=8х253, 2010=5х402=6х335=3х670, 2009=7х287, 2008=8х251=4х502, 2007=9х223=3х669, 2006=2х1003, 2005=5х401, 2004=4х501, 2002=2х1001=7х286, 2001=3х667, 2000=5х400=4х500=8х250, 1998=2х999=9х222=3х666=6х333, 1999,2003,2011,2017-простые.
Таким образом, учитывая, что М,Т,А,Н и С - различные цифры, заслуживают внимания для изучения только варианты
2022 = 2016 + 6 = 4х504 + 2 + 0 + 4 – не подходит
2022 = 2015 + 7 = 5х403 + 4 + 0 + 3 - не подходит
2022 = 2013 + 9 =3х671 + 1 + 7 + 1 - не подходит
2022 = 2012 + 10 =4х503 + 7 + 0 + 3 - подходит
2022 = 2012 + 10 =8х253 + 2 + 5 + 3 - не подходит
2022 = 2010 + 12 =5х402 + 10 + 0 + 2 - не подходит
2022 = 2010 + 12 =3х670 + 5 + 7 + 0 - подходит
2022 = 2008 + 14 =8х251 + 8 + 5 + 1 - не подходит
2022 = 2008 + 14 =4х502 + 12 + 0 + 2 - не подходит
2022 = 2005 + 17 =5х401 + 16 + 0 + 1 - не подходит
2022 = 2004 + 18 =4х501 + 17 + 0 + 1 - не подходит
2022 = 2002 + 20 =7х286 + 6 + 8 + 6 - не подходит
2022 = 2000 + 22 =8х250 + 17 + 5 + 0 - не подходит

Задача 6. (12 баллов) На кошачьей выставке в ряд сидит 300 котов. Каждый кот либо пушистый, либо голубоглазый, либо и пушистый, и голубоглазый. Известно, что если пушистый кот сидит рядом с пушистым котом, то он лжет. Если голубоглазый сидит рядом с голубоглазым, то он лжет. Во всех других случаях кот говорит правду. Каждый пушистый заявил “Рядом со мной два пушистых кота”. Каждый голубоглазый заявил “Рядом со мной два голубоглазых кота. (Если кот был и пушистым, и голубоглазым, то он сказал два утверждения). Какое максимальное количество утверждений могло быть сказано или, что-то же самое - какое наибольшее количество пушистых голубоглазых котов могло сидеть на выставке?

Ответ: 100

Решение: Заметим, что пушистые коты должны сидеть парами. В противном случае они будут высказывать истинное утверждение, хотя должны лгать, или лгать, хотя должны говорить правду. Аналогично для голубоглазых котов. В свете этого коты распределены по тройкам (один голубоглазый и не пушистый, один пушистый и не голубоглазый и один и пушистый, и голубоглазый) и четверкам (два пушистых не голубоглазых и два голубоглазых и не пушистых) с двойками (либо пара пушистых, либо пара голубоглазых) - между тройками

.

Пушистого голубоглазого (или дополнительного утверждение) нам дает только тройка. Причём между любыми двумя одновременно пушистыми и голубоглазыми должно сидеть как минимум два кота, которые таковыми не являются. Соответственно, чем больше троек, тем больше утверждений. 300 делится на 3 (=100), поэтому максимальное количество таких котов = 100

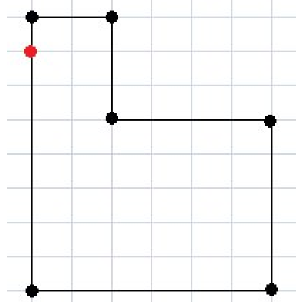
Г	Г			Г	Г			...	
		П	П			П	П		

Г	Г		Г	Г				...	
	П	П		П	П				

Г	Г		Г	Г			Г	...	
		П	П		П	П			

P.S.Заметим, что не любое количество от 0 до 100 можно реализовать. Например, 2 возможно, а 1 нет. Собственно, любое нечетное число нереализуемо

Задача 7. (10 баллов) Дон Кихот утром в понедельник выехал из своего замка и отправился в путешествие. В понедельник он проехал к вечеру ровно 5 км по прямой, во вторник он повернул на 90º в какую-то сторону и проехал 10 км по прямой, в среду снова повернул на 90º и проехал 15 км. И так далее: каждый день проезжая на 5 км больше, чем в предыдущий день. На каком наименьшем расстоянии от своего замка он мог оказаться в воскресенье вечером?



Ответ: 0 км

Решение: Это задача на конструктив. Поскольку можно предъявить пример путешествия, когда Дон Кихот возвращается в исходную точку, то никакого доказательства минимальности не требуется. 0 – это минимально возможное расстояние. На рисунке сторона клетки равна 5км и семь отрезков, поскольку с понедельника по воскресенье прошло семь дней.

Задача 8. (11 баллов) В ряд стоят 7 коробочек, в каждой из которых есть хотя бы один орех. Будем говорить, что орехи соседние, если они лежат в одной и той же или в соседних коробочках. Известно, что у каждого ореха либо ровно 4, либо ровно 7 соседних орехов. Сколько всего орехов может быть в коробочках? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 18 орехов.

Решение: Всего коробочек 7, обозначим их буквами А, Б, В, Г, Д, Е, Ж в том порядке, как они расположены в ряду.
Исходя из определения соседних орехов следует, что суммарное количество орехов, лежащих в А и Б равно 5 или 8. Аналогично в сумме в А, Б и В тоже 5 или 8.
Заметим, что поскольку по условию в каждой коробочке лежит хотя бы один орех, то эти две суммы не могут быть равны.
Следовательно, А+Б=5, А+Б+В=8. И В=3
Из тех же соображений
Е+Ж=5, Е+Ж+Д=8. И Д=3
Для коробочки Г сумма в В, Г и Д должна быть 5 или 8. Но В=Д=3, поэтому сумма В+Г+Д=8 и Г =2.
Сложив равенства А+Б+В=8, Е+Ж+Д=8 и Г=2, получаем А+Б+В+Г+Д+Е+Ж=18. Откуда общее количество орехов, лежащих в коробочках, равно 18.

Задача 9. (15 баллов) Из костяшек домино сложили рамку, как на рисунке по правилам домино, а именно: рядом расположены клетки с одинаковым количеством точек. Какое максимальное общее количество точек может быть в сумме на всех использованных доминошках, если дубли не использовали? (См. рис. 3)

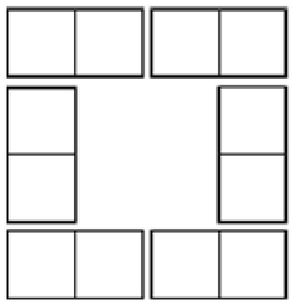
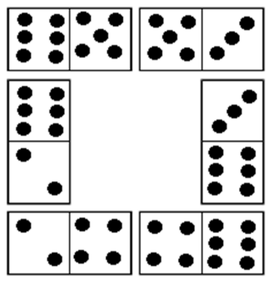


Рисунок 3

Ответ: 52

Решение: Заметим, что, поскольку доминошки выкладывались по правилам домино, то каждое число точек участвовало четное число раз. Выпишем доминошки (не дубли) с максимальной суммой точек: 5-6, 6-4, 6-3, 5-4, 6-2, 5-3. Сумма всех точек на них равна 11+10+9+9+8+8 = 55 - нечетное число, а при выкладывании по правилам домино должна быть четная сумма. Кроме того, поскольку среди этих доминошек только одна двойка и три пятерки, то обойтись только ими для создания рамки мы не сможем. Увеличивать сумму мы не можем, поэтому заменив две доминошки, мы уменьшим сумму как минимум на 2, но она должна быть четна. Значит максимальная сумма не превосходит 52. Для 52 можно построить пример.

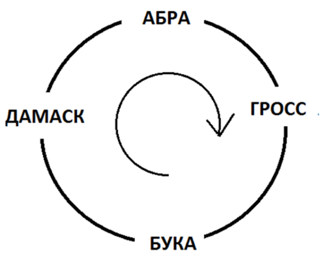


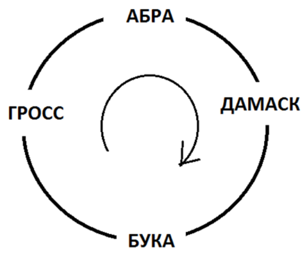
Задача 10. (9 баллов) Автобус ходит по круговому маршруту, на котором только 4 остановки — Абра, Бука, Гросс, Дамск. Однажды путешественник ехал в автобусе с местными жителями и спросил, когда будет станция Абра. Ему с готовностью ответили: Баба Маня: «Та остановка, на которой ты зашёл, — первая после Абры. Баба Валя: «Да нет, ты всё путаешь! Абра была после Дамска. А зашёл он на Буке». Баба Аня: «Вы обе неправы! Гросс и Дамск — соседние остановки!» Баба Галя: «Как раз на Абре-то он и вошёл!». Как потом выяснилось, все утверждения бабушек про остановки и путешественника оказались неверными. Определите, в каком порядке идут остановки на маршруте и на какой остановке вошёл путешественник?

Ответ: Остановки по круговому маршруту: Абра - Дамаск - Бука - Гросс, путешественник вошел на Гроссе.

Решение: Поскольку все утверждения бабушек про путешественника и остановки неверны, то он зашел в трамвай не на Буке и не на Абре.

Поскольку Гросс и Дамаск не соседние, то они “разбавлены” Букой и Аброй. Значит, с точностью до отражения остановки расположены так:





Поскольку утверждение, что Абра после Дамаска неверно, то вариант слева отпадает. Но тогда путешественник зашел не на Дамаске. Значит, он зашел на Гроссе