



## Задачи «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

**Задача 1.** (5 баллов) Есть три ведра воды. Полное первое вмещает столько же, сколько  $\frac{2}{3}$  второго или  $\frac{3}{4}$  третьего. Известно, что каждое ведро вмещает целое число литров, а чтобы наполнить все три ведра до полна, понадобится меньше 40 литров. Укажите в правильном порядке, сколько литров вмещает каждое из ведер?

**Задача 2.** (7 баллов) На каждой грани куба написано целое число. Три из них показаны на рисунке, а про остальные три известно, что они простые. Кроме того, суммы чисел на противоположных гранях равны. Чему может быть равна сумма всех чисел на кубе? (См. рис. 1)

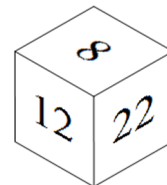


Рисунок 1

**Задача 3.** (7 баллов) В коробке лежит десять конфет. Известно, что из них семь шоколадных и три карамельных, а также семь с орехами и три без орехов. Какое наименьшее количество конфет нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых обязательно оказалась хотя бы одна шоколадная с орехами?

**Задача 4.** (8 баллов) Тридцать три богатыря устроили пир за круглым столом. Среди них есть бородатые и безбородые. Назовём богатырей, сидящих рядом с некоторым богатырём, его соседями, сидящих через одного от него – вторыми соседями, сидящих через двух – третьими и так далее. Оказалось, что для каждого бородатого богатыря ровно у одного из его вторых соседей и ровно у одного из его четвертых соседей тоже есть борода. Сколько богатырей бородаты?

**Задача 5.** (8 баллов) На прямой отмечена одна красная точка и шесть синих. Расстояние между любыми двумя отмеченными точками равно целому числу сантиметров. При этом сумма расстояний от красной точки до синих равна 14 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя синими точками.

**Задача 6.** (10 баллов) Найдите все такие натуральные числа  $n$ , для которых верны не менее двух из трёх следующих утверждений:

- 1)  $n - 86$  является квадратом натурального числа;
- 2)  $n - 39$  делится на 10;
- 3)  $n + 3$  является квадратом натурального числа.

**Задача 7.** (12 баллов) Пусть  $AP$  и  $CQ$  – высоты равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$ . Известно, что  $AC = 2PQ$ . Какой может быть величина угла  $B$ ? Ответ дайте в градусах.

**Задача 8.** (14 баллов) Петя подсчитал количество способов, которыми можно закрасить некоторые клетки (возможно, ни одной) таблицы  $5 \times 10$  так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было чётное число закрашенных клеток. Оно оказалось степенью двойки. Какой именно степенью?

**Задача 9.** (14 баллов) На числовой прямой отмечено бесконечное количество точек:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ . Найдите наименьшее возможное значение  $X$ , при котором тремя отрезками длины  $X$  можно покрыть все эти точки. Отрезок покрывает свои концы. Ответ запишите в виде конечной десятичной дроби.

**Задача 10.** (15 баллов) В наборе 27 гирек, массы которых равны  $1 \text{ г}, 2 \text{ г}, \dots, 27 \text{ г}$ . Каждая гирька сделана либо из алюминия, либо из железа, либо из меди, при этом средняя масса алюминиевых гирек равна  $15 \text{ г}$ , железных –  $3 \text{ г}$ , а медных –  $18 \text{ г}$ . Сколько алюминиевых гирек может быть в наборе?