Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Есть три ведра воды. Полное первое вмещает столько же, сколько 2/3 второго или 3/4 третьего. Известно, что каждое ведро вмещает целое число литров, а чтобы наполнить все три ведра дополна, понадобится меньше 40 литров. Укажите в правильном порядке, сколько литров вмещает каждое из вёдер?

Ответ: 6, 9, 8.

Решение: Из условия следует, что вместимость первого ведра (в литрах) делится на 2 и на 3, то есть кратна 6. Если она равна 6 л, то второе ведро вмещает 6·3/2 = 9 л, а третье – 6·4/3 = 8 л. В сумме это даёт 6 + 9 + 8 = 23 л. Если же вместимость первого ведра больше 6 л, то все вёдра вмещают хотя бы в 2 раза больше и суммарная их вместимость не меньше 46 л, что противоречит условию.

Задача 2. (7 баллов) На каждой грани куба написано целое число. Три из них показаны на рисунке, а про остальные три известно, что они простые. Кроме того, суммы чисел на противоположных гранях равны. Чему может быть равна сумма всех чисел на кубе? (См. рис. 1)

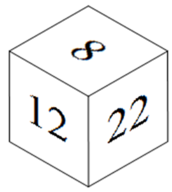

Рисунок 1

Ответ: 75.

Решение: Числа на видимых гранях куба дают различные остатки при делении на 3, поэтому то же верно и для чисел на невидимых гранях. Но единственное простое число, кратное 3, это 3, и оно может быть написано только напротив наибольшего из видимых чисел, то есть напротив 22. Значит, сумма чисел на противоположных гранях равна 25, а сумма всех чисел на кубе – 25·3 = 75.

Задача 3. (7 баллов) В коробке лежит десять конфет. Известно, что из них семь шоколадных и три карамельных, а также семь с орехами и три без орехов. Какое наименьшее количество конфет нужно вынуть из коробки не глядя, чтобы среди вынутых обязательно оказалась хотя бы одна шоколадная с орехами?

Ответ: 7.

Решение: Если вынуть шесть конфет, то среди них могут оказаться три шоколадных без орехов и три карамельных с орехами. А если вынуть семь конфет, то максимум три из них будут карамельными и максимум три – без орехов, поэтому хотя бы одна будет шоколадная с орехами.

Задача 4. (8 баллов) Тридцать три богатыря устроили пир за круглым столом. Среди них есть бородатые и безбородые. Назовём богатырей, сидящих рядом с некоторым богатырём, его соседями, сидящих через одного от него – вторыми соседями, сидящих через двух – третьими и так далее. Оказалось, что для каждого бородатого богатыря ровно у одного из его вторых соседей и ровно у одного из его четвёртых соседей тоже есть бороды. Сколько богатырей бородаты?

Ответ: 22.

Решение: Пронумеруем богатырей по кругу числами от 1 до 33. Пусть, например, борода есть у богатыря 1 и у его второго соседа 3. Тогда, пересадив всех богатырей в порядке 1, 3, …, 33, 2, 4, …, 32, несложно понять, что они сидят так: два бородатых, безбородый, два бородатых, безбородый и так далее. Значит, бородатые богатыри составляют 2/3 от общего числа, то есть их 22.

Задача 5. (8 баллов) На прямой отмечена одна красная точка и шесть синих. Расстояние между каждыми двумя отмеченными точками равно целому числу сантиметров. При этом сумма расстояний от красной точки до синих равна 14 см. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя синими точками.

Ответ: 8.

Решение: Сумма расстояний от красной точки до любых четырёх синих не меньше 6 см (и может быть равна 6 см, только если две из них находятся слева на расстояниях 1 см и 2 см, а две другие – справа

на тех же расстояниях). Поэтому сумма расстояний от красной точки до любых двух синих не превосходит $14 - 6 = 8$ см. Значит, и расстояние между двумя синими точками не может быть больше 8 см.
Если отметить по три синие точки слева и справа от красной так, чтобы с каждой стороны расстояния от красной точки до синих были равны 1 см, 2 см и 4 см, то длина отрезка с концами в крайних синих точках будет равна 8 см.

Задача 6. (10 баллов) Найдите все такие натуральные числа n, для которых верны не менее двух из трёх следующих утверждений:
1) $n - 86$ является квадратом натурального числа;
2) $n - 39$ делится на 10;
3) $n + 3$ является квадратом натурального числа.

Ответ: 2022.

Решение: Если верно второе утверждение, то n заканчивается на 9. Тогда $n - 86$ заканчивается на 3, а $n + 3$ – на 2. Однако точные квадраты не оканчиваются ни на 3, ни на 2, поэтому в этом случае верно только одно утверждение, что противоречит условию. Следовательно, верны первое и третье утверждения.
Обозначим $n - 86 = x^2$, $n + 3 = y^2$. Вычитая из второго равенства первое и применяя формулу разности квадратов, получим $(y - x)(y + x) = 89$. Так как 89 – простое число, то единственным его представлением в виде произведения двух натуральных чисел является $1 \cdot 89$. Значит, $y - x = 1$, $y + x = 89$, откуда $x = 44$, $y = 45$ и $n = 45^2 - 3 = 2022$.

Задача 7. (12 баллов) Пусть AP и CQ – высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Известно, что $AC = 2PQ$. Какой может быть величина угла B? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 60° или 120°.

Решение: Из симметрии следует, что отрезки AC и PQ параллельны.
Если угол B острый, то точки P и Q лежат на сторонах BC и AB. Тогда понятно, что PQ – средняя линия треугольника ABC, то есть высота AP является и медианой. Значит, в треугольнике ABC равны все стороны, поэтому его углы равны 60°.
Если угол B тупой, то точки P и Q лежат на продолжениях сторон BC и AB. Продолжим прямые AB и BC до пересечения в точке D. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что треугольник ADC равносторонний, а значит, его высоты AP и CQ при пересечении образуют угол 120°.

Задача 8. (14 баллов) Петя подсчитал количество способов, которыми можно закрасить некоторые клетки (возможно, ни одной) таблицы 5×10 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было чётное число закрашенных клеток. Оно оказалось степенью двойки. Какой именно степенью?

Ответ: 36.

Решение: Закрасим произвольно клетки левого верхнего прямоугольника 4×9. Тогда все остальные клетки закрашиваются однозначно. Действительно, для всех клеток правого столбца, кроме нижней, необходимо получить чётное число закрашенных клеток в соответствующей строке. Аналогично для всех клеток нижней строки – нужно получить чётное число закрашенных клеток в соответствующем столбце. При этом в нижней строке противоречия не возникнет, поскольку если во всех столбцах чётное число закрашенных клеток, то и во всей таблице их количество чётно. А так как во всех строках, кроме нижней, чётное число закрашенных клеток, то и в нижней строке их автоматически будет чётное число.
Таким образом, удовлетворяющая условию раскраска таблицы однозначно задаётся раскраской прямоугольника 4×9. При этом для каждой его клетки есть два варианта: быть закрашенной или нет, поэтому число способов равно 2^{36}.

Задача 9. (14 баллов) На числовой прямой отмечено бесконечное количество точек: 1, 1/2, 1/3, 1/4, … Найдите наименьшее возможное значение X, при котором тремя отрезками длины X можно покрыть все эти точки. Отрезок покрывает свои концы. Ответ запишите в виде конечной десятичной дроби.

Ответ: 0,25.

Решение: Предположим, что можно покрыть все отмеченные точки отрезком длины меньше 1/4. Самый левый отрезок должен покрывать число 0, иначе будет покрыто лишь конечное число точек. Значит, этот отрезок не покрывает число 1/4, поэтому его должен покрывать второй отрезок. Тогда он не покрывает число $1/4 + 1/4 = 1/2$. Но числа 1/2 и 1 нельзя покрыть одним отрезком. Противоречие.

Из оценки также понятно, как покрыть все точки отрезками длины 1/4: достаточно взять отрезки [0, 1/4], [1/4, 1/2], [3/4, 1].

Задача 10. (15 баллов) В наборе 27 гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, …, 27 г. Каждая гирька сделана либо из алюминия, либо из железа, либо из меди, при этом средняя масса алюминиевых гирек равна 15 г, железных – 3 г, а медных – 18 г. Сколько алюминиевых гирек может быть в наборе?

Ответ: 11, 16 или 21.

Решение: Обозначим количество алюминиевых гирек через x, железных – через y, медных – через z. Тогда суммарная масса алюминиевых гирек равна $15x$ г, железных – $3y$ г, медных – $18z$ г, а так как сумма масс всех гирек набора равна $1 + 2 + \ldots + 27 = 378$ г, то $15x + 3y + 18z = 378$. Сократив последнее равенство на 3, получим $5x + y + 6z = 126$.
Кроме того, умножив равенство $x + y + z = 27$ на 5, получим $5x + 5y + 5z = 135$. Из этих двух равенств следует, что $4y - z = 9$. Значит, $y \geq 3$. С другой стороны, если бы железных гирек было не менее шести, то их средняя масса была бы не меньше 3,5 г, что противоречит условию, поэтому $y \leq 5$. Таким образом, возможны три случая.
1) $y = 3$, $z = 4 \cdot 3 - 9 = 3$, $x = 27 - 3 - 3 = 21$. Подходит, например, вариант, когда массы железных гирек равны 2 г, 3 г, 4 г, медных – 17 г, 18 г, 19 г, а все остальные гирьки алюминиевые.
2) $y = 4$, $z = 4 \cdot 4 - 9 = 7$, $x = 27 - 4 - 7 = 16$. Массы железных гирек могут быть равны 1 г, 2 г, 4 г, 5 г, медных – 15 г, 16 г, …, 21 г, а все остальные гирьки алюминиевые.
3) $y = 5$, $z = 4 \cdot 5 - 9 = 11$, $x = 27 - 5 - 11 = 11$. Массы железных гирек могут быть равны 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, медных – 13 г, 14 г, …, 23 г, а все остальные гирьки алюминиевые.