



## Ответы и решения задач «зеленого» уровня сложности MathCat

**Задача 1.** (5 баллов) Многочлен  $Ax^2 + Bx + C$  имеет корни 1 и  $-3$ . Какие корни имеет многочлен  $-Ax^2 + Bx - C$  ?

**Ответ:** 3 и  $-1$ .

**Решение 1:** Корни квадратного трёхчлена  $Ax^2 + Bx + C$  можно найти по формуле  $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ . Корни трёхчлена  $-Ax^2 + Bx - C$  по формуле  $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{-2A}$ , откуда видно, что корни отличаются только знаками.

**Решение 2.:** Заметим, что многочлен  $-Ax^2 + Bx - C$  имеет те же корни, что и многочлен  $Ax^2 - Bx + C$ . Но этот многочлен имеет корни, симметричные корням исходного многочлена  $Ax^2 + Bx + C$  относительно начала координат. Например, потому, что если у многочлена  $Ax^2 + Bx + C$  есть корень  $t$ , то есть  $At^2 + Bt + C = 0$ , то  $A(-t)^2 - B(-t) + C = 0$  тоже.

**Задача 2.** (5 баллов) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в мешок, а золотую зарыл, и опять выросло дерево. Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в мешок, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в мешке у Буратино было 1000 серебряных монет. Сколько монет закопал Буратино?

**Ответ:** 999

**Решение:** Заметим, что в результате одного «закапывания» количество монет увеличивается на 1. Поскольку сначала у него была одна монета, а стало 1000, то он закопал 999 монет.

**Задача 3.** (7 баллов) На доске написано несколько натуральных чисел, причём все цифры в их записи имеют одну и ту же чётность. Сумма всех чисел равна 2023. Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

**Ответ:** 3

**Решение:** В данной сумме присутствуют цифры разной четности. Поэтому это не может быть одно число. Заметим также, что сумма чисел нечётна. Это значит, что было просуммировано нечётное количество нечётных чисел. И как было доказано выше, больше одного. Следующий вариант – три числа. Для трёх чисел есть пример: 111, 999, 913.

**Задача 4.** (7 баллов) Столяр дядя Федя сложил рядом три одинаковые доски и тремя распилами, как показано на рисунке (См. рис. 1), получил 9 деревянных кусочков. Известно, что длина доски составляет 1 метр. Сколько кусочков он получит, если возьмёт 7 таких же досок и сделает 7 подобных распилов?

**Ответ:** 35

**Решение:** Заметим, что максимальное количество кусочков получается на верхней доске, а каждая следующая доска при разрезании даёт на 1 кусочек меньше. Так как всего распилов 7, то на верхней доске 8 кусочков, на следующей – 7 и так далее до самой нижней, на которой кусочков на 6 меньше, чем на самой верхней, то есть 2. Отсюда общее количество получившихся кусочков:  $8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 35$ .

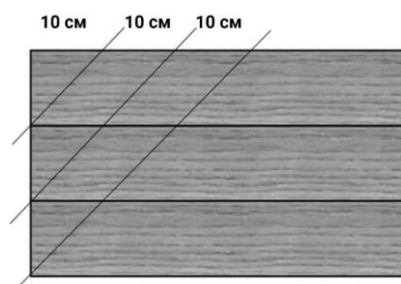


Рисунок 1

**Задача 5.** (10 баллов) Вершину треугольника соединили отрезками с 90 различными точками, взятыми на противоположающей стороне. Сколько новых треугольников образовалось в итоге?

**Ответ:** 4185.

**Решение:** Заметим, что всего на противоположающей стороне треугольника будет отмечено 92 точки, включая 2 вершины треугольника. Каждый треугольник задается какими-то двумя точками из 92 точек на противоположающей стороне, то есть надо посчитать количество способов выбрать из 92 точек ровно 2. Это число равно  $92 \cdot 91 : 2 = 4186$ , так как на первое место можно выбрать одну из 92 точек. Для каждого такого

выбора приходится ровно 91 способ выбрать вторую точку – все кроме первой. Но каждый вариант в таком случае посчитается 2 раза, потому что не имеет разницы, выбрать ли сначала точку А, а потом точку В или наоборот, поэтому надо полученное число поделить на 2. Осталось вычесть один исходный треугольник, который уже был, поэтому новых треугольников получится 4185.

**Задача 6.** (12 баллов) Кощей Бессмертный решил собрать сундук изумрудов и в первый день положил в пустой сундук 1 изумруд. На следующий день положил туда 2 изумруда и так далее – каждый следующий день он клал в сундук на 1 изумруд больше, чем в предыдущий. Однако во вторую ночь Баба Яга стащила из сундука 1 изумруд и каждую следующую ночь тащила на 1 изумруд больше. Как только в сундуке наберётся 1111 изумрудов, Кощей его запечатает и спрячет, и баба Яга не сможет красть. На какой день это произойдёт?

**Ответ:** 556

**Решение:** Рассмотрим, как изменяется количество изумрудов в сундуке по дням.

2 день – 3 изумруда (положил 2), 2 ночь – 2 изумруда (украли 1)

3 день – 5 изумрудов (положил 3), 3 ночь – 3 изумруда (украли 2)

4 день – 7 изумрудов (положил 4), 4 ночь – 4 изумруда (украли 3)

...

N день – (2N – 1) изумруд (положил N), N-я ночь – N изумрудов (украли N-1)

Можно заметить, что максимальное количество изумрудов в сундуке достигается днём. Нам нужно, чтобы  $2N - 1 = 1111$ , откуда  $N=556$ . То есть на 556 день в сундуке впервые окажется 1111 изумрудов и в этот день Кощей сундук запечатает и спрячет.

**Задача 7.** (12 баллов) В стеклянной коробке размером 4x4x4 ячейки в некоторых ячейках лежат конфеты (в каждой ячейке не более одной). Дима, Сережа и Лена смотрят на эту коробку с трех сторон: Дима – спереди, Сережа – сверху, а Лена – сбоку. Какое максимальное количество конфет может лежать в коробке, если все они видят по 4 конфеты (если какие-то конфеты лежат друг за другом, то наблюдатели видят только первую конфету)?

**Ответ:** 8

**Решение:** Предположим, что конфет 9 или больше. Это значит, что за какой-то конфетой (конфетами) лежит еще хотя бы две конфеты, то есть имеется ряд (вертикальный или горизонтальный), в котором три или четыре конфеты. Это означает, что с двух других ракурсов двое других наблюдателей видят все эти три или четыре конфеты. Если есть ряд из четырёх конфет, то с двух других ракурсов наблюдатели видят все эти четыре конфеты, то есть оставшиеся должны быть расположены так, чтобы к видимым конфетам не добавить ни одной, что невозможно. Или же (если ряд из трёх конфет) оставшиеся 6 или более конфет должны быть так расположены, чтобы добавить к уже видимым трём конфетам ещё только одну. Однако, поскольку конфет не менее 6, то за какой-то из этих трёх конфет расположены две конфеты, которые видимы хотя бы для одного из наблюдателей одновременно с уже имеющимися тремя. Таким образом, получается, что для какого-то наблюдателя будут видны хотя бы 5 конфет, что противоречит условию.

Пример на 8 конфет есть: в каждом углу лежит по конфете.

**Задача 8.** (12 баллов) На рисунке (См. рис. 2) изображены два квадрата и два одинаковых равнобедренных треугольника. Известно, что площадь квадрата равна 16. Найдите площадь серого треугольника.

**Ответ:** 2

**Решение:** Заметим, что треугольники ABD и BAC равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно,  $AD=BC$  и ACBD – параллелограмм и его диагонали делятся точкой пересечения пополам. То есть M – середина AB. Поскольку треугольник ACE – равнобедренный, то линия, проведенная через C параллельно стороне квадрата AB, проходит через середину стороны AE – точку K. Так как у треугольников AMK и AMC одно и то же основание и равны высоты, опущенные на это основание, то и площади этих треугольников равны. А площадь треугольника AMK – восьмая часть площади исходного квадрата.

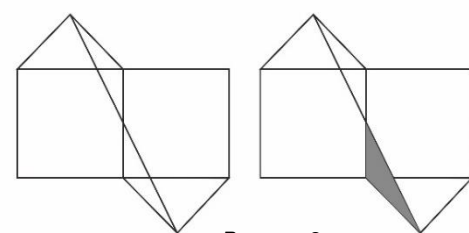
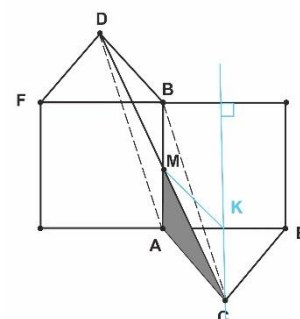


Рисунок 2



**Задача 9.** (15 баллов) Одиннадцати мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного, жёлтого и зелёного цвета. Причем известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зелёный?» Никто не ответил ни «да», ни «нет». Через минуту этот вопрос снова повторили всем мудрецам. Несколько мудрецов сказали «да». Сколько мудрецов ответило теперь «да»?

**Ответ:** 2

**Решение:** Поскольку в первый раз никто не сказал ни «да», ни «нет», это значит, что каждый видел колпаки всех цветов. Так как если бы какой-то цвет был в одном экземпляре, то мудрец с этим колпаком немедленно это обнаружил бы и сказал либо «да», либо «нет». Значит, каждого цвета хотя бы два колпака. То есть два синих, два белых, два красных, два жёлтых, два зелёных – это десять колпаков. Рассмотрим оставшийся одиннадцатый колпак. Если он зелёный, то каждый из трёх мудрецов с зелёным колпаком видит перед собой все цвета по два раза и не может сделать вывод, какого цвета его колпак. Если же одиннадцатый колпак любого другого цвета кроме зелёного, то теперь все, у кого колпаки не этого цвета точно знают свой цвет. В том числе и обладатели зелёных колпаков. А так как по условию есть те, кто сказал «да», то это мудрецы в зелёных колпаках. И их ровно двое.

**Задача 10.** (15 баллов) На доске было написано «РЕШАЕМ МАТКЭТ ВМЕСТЕ!». Костя и Вася решили сыграть в следующую игру: каждый в свой ход может зачеркнуть любое количество одинаковых букв. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнюю букву. Начинает Костя. Как ему нужно играть, чтобы гарантированно выиграть? В ответе укажите первый ход – какие буквы нужно зачеркнуть.

**Ответ:** ЕЕ

**Решение:** Разобьём буквы на группы одинаковых.

ВРШКЭС – 6 групп по одной букве

АА – одна группа из двух букв

МММ ТТТ – две группы по три буквы

ЕЕЕЕ – одна группа из четырёх букв.

Если первым ходом зачеркнуть две буквы Е, то получившиеся группы можно разбить на две симметричные части. Например, В, Р, Ш, АА, МММ и К, Э, С, ЕЕ, ТТТ. И теперь Костя будет повторять ходы Васи, а именно: если Вася зачеркивает одиночную букву в одной части, то Костя также зачеркивает одиночную букву в другой части. Если Вася зачеркивает сколько-то букв (одну, две или три) из группы из двух или трёх букв, то Костя совершает аналогичное действие в другой части. Тем самым у Кости всегда есть ход и после его хода позиция симметрична, а после хода Васи – нет. Это значит, что ситуацию «нет букв» сможет после своего хода получить только Костя, а именно зачеркнуть последнюю букву.

Докажем теперь, что другие варианты не гарантируют выигрыш.

Действительно, если Костя зачеркнет что-то другое, то Вася сможет сделать симметричную позицию и воспользоваться ранее описанной стратегией.

Если зачеркнет какое-то количество букв Е (но не две), то:

если Е, то Вася зачеркивает еще Е;

если ЕЕЕ, то Вася – А ;

если ЕЕЕЕ, то Вася АА.

Если Костя зачеркнет А, то Вася – ЕЕЕ, если АА, то Вася – ЕЕЕЕ.

Если Костя зачеркнет не Е и не А, а одну букву из трёх одинаковых, то Вася – Е и снова у нас две пары и две тройки.

Если же Костя зачеркнет любую одиночную букву, то Вася – Е. Тогда получится группа АА, три группы из трёх букв и пять из одной. И теперь после любого хода Кости Вася одним ходом делает четное количество как групп из трёх букв, так и из двух букв, так и из одиночных букв и снова использует симметричную стратегию.