Ответы и решения задач «желтого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (6 баллов) Дробь $\frac{2xyz}{xyz5}$ сократили и получили $\frac{2}{5}$ (x, y, z – какие-то цифры, не обязательно различные). Найдите сумму $x + y + z$.

Ответ: 18.

Решение: Обозначим $A = \underline{xyz}$, тогда условие можно записать в таком виде: $\frac{2000+A}{10A+5} = \frac{2}{5}$. После преобразований получим $5(2000 + A) = 2(10A + 5) \Leftrightarrow 10000 + 5A = 20A + 10 \Leftrightarrow 15A = 9990 \Leftrightarrow A = 666$. Следовательно, $x + y + z = 6 + 6 + 6 = 18$.

Задача 2. (6 баллов) На заборе написано десять утверждений: «№1. Неверных утверждений здесь на 1 больше, чем верных», «№2. Неверных утверждений здесь на 2 больше, чем верных», …, «№10. Неверных утверждений здесь на 10 больше, чем верных». Укажите номера всех верных утверждений (если таких нет, ответьте «0»).

Ответ: 8.

Решение: В задаче 2 зелёного уровня показано, что среди данных утверждений верным является одно. Значит, остальные девять утверждений неверны, поэтому неверных утверждений на 8 больше, чем верных, т.е. верно утверждение №8.

Задача 3. (7 баллов) Петя перемножил число и номер месяца своего дня рождения. Когда у Пети может быть день рождения, если в результате он получил 156?

Ответ: 26 июня или 13 декабря.

Решение: Разложим число 156 на простые множители: $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$. Отсюда видно, что 156 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел, одно из которых не больше 31, а другое – не больше 12, двумя способами: $156 = 26 \cdot 6$ и $156 = 13 \cdot 12$. Таким образом, день рождения у Пети может быть 26 июня или 13 декабря.

Задача 4. (8 баллов) Длины диагоналей выпуклого четырёхугольника равны 1 м и 100 м. Какие значения может принимать его периметр, если он измеряется целым числом метров?

Ответ: 201.

Решение: Пусть $ABCD$ – данный четырёхугольник, O – точка пересечения его диагоналей, $BD = 1$ м, $AC = 100$ м. По неравенству треугольника $100 = AC < AB + BC < (AO + BO) + (BO + CO) = 100 + 2BO$. Аналогично $100 < CD + DA < 100 + 2DO$. Сложив эти неравенства, получим $200 < P < 202$, где P – периметр четырёхугольника. Так как по условию P – целое число, то $P = 201$ м.

Задача 5. (9 баллов) Большой прямоугольный лист бумаги сложили восемь раз пополам (поочерёдно вдоль и поперёк). В полученном прямоугольнике отрезали все четыре угла. Сколько будет дырок в листе, если развернуть его обратно? (Вырез на краю листа не считается дыркой.)

Ответ: 225.

Решение: Газету сложили четыре раза по горизонтали и столько же раз по вертикали. Следовательно, получилось по $2^4 - 1 = 15$ горизонтальных и вертикальных линий сгиба. После того как газету развернули, дырки оказались в точках пересечения этих линий, поэтому их количество равно $15^2 = 225$.

Задача 6. (10 баллов) За круглым столом сидят 50 человек. Каждый из них либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт), либо хитрец (чередует истинное и ложное утверждения, начать может с любого). Все сделали по два утверждения: «Один из моих соседей лжец» и «Один из моих соседей хитрец». Какое наименьшее число хитрецов может быть за столом?

Ответ: 20.

Решение: Соседями каждого лжеца являются два рыцаря, а соседями каждого рыцаря – лжец и хитрец. Отсюда следует, что у хитреца не может быть соседей-лжецов, поэтому его соседями могут быть либо рыцарь и хитрец, либо два хитреца. Таким образом, круг состоит из групп вида РЛР, между каждыми двумя соседними из которых сидит не менее двух хитрецов. Значит, хитрецы составляют не менее $\frac{2}{5}$ от всех сидящих за столом, т.е. их не меньше 20. С другой стороны, если между каждыми двумя соседними группами вида РЛР сидит ровно два хитреца, то их как раз 20.

Задача 7. (11 баллов) Каждая клетка доски 30×30 окрашена в чёрный или белый цвет. Каждая чёрная клетка, не лежащая на границе доски, имеет ровно пять белых соседей (из восьми – по горизонтали, вертикали или диагонали), а каждая белая клетка, не лежащая на границе доски, имеет ровно четыре чёрных соседа из восьми. Сколько клеток на доске окрашено в белый цвет?

Ответ: 500.

Решение: Разобьём доску на 100 квадратов 3×3 и рассмотрим произвольный из них. Если в его центре чёрная клетка, то в нём пять белых клеток. Если же центральная клетка белая, то в нём четыре чёрных клетки, а значит, снова пять белых. Таким образом, в каждом квадрате 3×3 пять белых клеток, поэтому всего их 5·100 = 500.

Задача 8. (12 баллов) Сколькими способами можно расставить в пустых кружках на рисунке (См. рис.1) натуральные числа так, чтобы сумма в каждом ряду из трёх кружков (ряды обозначены отрезками) была одинакова?

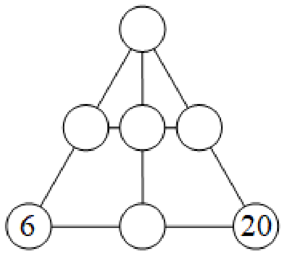

Рисунок 1

Ответ: 15.

Решение: Пусть указанная сумма равна *S*, а число в верхнем кружке равно *a*. Три отрезка, сходящиеся в верхнем кружке, содержат его три раза, а все остальные кружки – по одному разу. С другой стороны, все кружки, кроме верхнего, принадлежат двум горизонтальным отрезкам, поэтому $3S = 3a + 2S$. Значит, $S = 3a$, среднее число в нижнем ряду равно $3a - 26$, а числа во втором ряду слева направо – $2a - 6$, $26 - a$, $2a - 20$. Отсюда видно, что *a* может принимать значения от 11 до 25.

Задача 9. (15 баллов) Площадь прямоугольного треугольника, вписанного в круг, ровно в 2π раз меньше площади этого круга. Найдите величину наименьшего угла треугольника.

Ответ: 15°.

Решение: Пусть *ABC* – данный треугольник, $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$ – наименьший угол треугольника, а радиус круга равен 1. Тогда *AB* – диаметр круга, поэтому $AB = 2$, $AC = 2\cos\alpha$, $BC = 2\sin\alpha$. Площадь круга радиуса 1 равна π, значит, площадь треугольника *ABC* равна $\frac{1}{2}$. С другой стороны, она равна $\frac{1}{2}AC\cdot BC$, откуда $AC\cdot BC = 1 \Leftrightarrow 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$. Так как $0° < 2\alpha \le 90°$, то $2\alpha = 30°$ и $\alpha = 15°$.

Задача 10. (16 баллов) В числе 21231221 содержится 3 цифры 1, 4 цифры 2 и 1 цифра 3. Убрав из подчёркнутой фразы все слова, мы получим число 314213. Будем говорить, что число 314213 является описанием числа 21231221. Найдите минимальное число, не содержащее нулей, которое является описанием самого себя. (Составляя описание, мы сначала пишем про единицы, потом про двойки и т.д.)

Ответ: 21322314.

Решение: Предположим, что существует число из $2n$ цифр, которое является описанием самого себя и меньше указанного в ответе. По условию цифры на чётных местах в нём равны 1, 2, …, n. Цифры на нечётных местах должны быть из этого же набора. При этом они указывают количество следующих за ними цифр в числе, поэтому их сумма равна $2n$.

Докажем, что $n \le 4$. Предположим, что это не так, и рассмотрим три случая.

1) $n = 1$. Тогда первой цифрой должна быть двойка, но число может состоять только из единиц. Противоречие.
2) $n = 2$. Тогда первой и третьей цифрами могут быть только двойки, но число 2122 не является описанием самого себя.
3) $n = 3$. Тогда цифры на нечётных местах – либо 1, 2, 3 в некотором порядке, либо три двойки. Но описания таких чисел имеют другой вид: 212223 и 114213 соответственно.
Теперь будем строить наименьшее возможное восьмизначное число. На первом месте не может стоять цифра 1, иначе будет уже две единицы, поэтому поставим на это место двойку. В числе уже есть две двойки, поэтому цифра на третьем месте не меньше 2. Но и цифры 2 там быть не может, иначе будет уже три двойки. Ставим на это место тройку, после чего остальные цифры расставляются однозначно.